Capitolo 4

Teoremi Limite

Una parte importante del Calcolo delle Probabilità è costituita da teoremi che studiano il limite di successioni di v.a.. Un gran numero di questi teoremi si può classificare in due grandi famiglie: Teoremi del Limite Centrale (TLC) e Leggi dei Grandi Numeri (LGN). Accanto a questi vi è poi lo studio della velocità di convergenza e delle oscillazioni. In queste lezioni ci limiteremo a dare alcuni esempî importanti di TLC e di LGN.

4.1 TLC: condizioni sufficienti

Il TLC studia la convergenza in legge di una successione di v.a. ad una v.a. (che può essere fittizia) che abbia legge $N(0,1)$. Il TLC non è affatto un teorema, bensí piuttosto una classe di teoremi. Un esempio di TLC si è già incontrato nel corso introduttivo a proposito del teorema di de Moivre–Laplace. Si considererà qui il solo caso di una successione di v.a. indipendenti. Per una trattazione completa di questo problema nelle condizioni nelle quali ci siamo posti, si veda il libro di Loève citato in Bibliografia. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti e appartenenti a L^2. Si ponga, per comodità di notazione,

$$m_j := \mathbb{E}(X_j), \quad \sigma_j^2 := V(X_j) \quad (j \le n), \quad S_n := \sum_{j=1}^n X_j$$

onde

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{j=1}^n m_j \quad \text{e} \quad c_n^2 := V(S_n) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 .$$

Si consideri ora la v.a.

$$T_n := \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{c_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

che ha speranza e varianza rispettivamente eguali a 0 e a 1.

Definizione 4.1.1. Se X^* è una v.a. con legge $N(0,1)$, si dice che la successione (X_n) obbedisce al TLC se la successione (T_n) converge a X^* in legge. ◇

Il ruolo della v.a. X^* è del tutto marginale, tanto che spesso si scrive

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} N(0,1) .$$

Si cercheranno dapprima condizioni che assicurino la convergenza. Il risultato che segue è fondamentale.

Teorema 4.1.1. (Lindeberg). *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti di L^2. Se, con le notazioni appena introdotte, è verificata la condizione di Lindeberg*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{c_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\{|X_j-m_j|\geq\varepsilon c_n\}} (X_j - m_j)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \,, \tag{4.1.1}$$

allora la successione (T_n) converge in legge alla distribuzione $N(0,1)$, vale a dire che la successione (X_n) obbedisce al TLC.

Si osservi che la condizione di Lindeberg (4.1.1) si può scrivere nella forma equivalente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{c_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\{|x-m_j|\geq\varepsilon c_n\}} (x - m_j)^2 \, \mathrm{d}F_j(x) = 0 \,.$$

Prima di dare la dimostrazione di questo teorema, conviene metterne in luce alcune conseguenze particolarmente importanti nelle applicazioni; ciò sarà fatto in una serie di corollarî.

Corollario 4.1.1. *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti uniformemente limitate, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|X_n| \leq H$, e sia $\lim_{n\to+\infty} c_n^2 = +\infty$. Allora (X_n) obbedisce al TLC.*

Dimostrazione. Per ogni $j \leq n$ si ha, usando la diseguaglianza di Čebyšev,

$$\int\limits_{\{|X_j-m_j|\geq\varepsilon c_n\}} (X_j - m_j)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq 4H^2 \, \mathbb{P}(|X_j - m_j| \geq \varepsilon c_n) \leq \frac{4H^2\sigma_j^2}{\varepsilon^2 c_n^2} \,,$$

onde

$$0 \leq \frac{1}{c_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\{|X_j-m_j|\geq\varepsilon c_n\}} (X_j - m_j)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \frac{1}{c_n^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{4H^2\sigma_j^2}{\varepsilon^2 c_n^2} = \frac{4H^2}{\varepsilon^2 c_n^2} \,,$$

sicché la condizione di Lindeberg (4.1.1) è verificata. □

Corollario 4.1.2. *Sia (X_n) una successione di v.a. di L^2 indipendenti ed isonome. Allora (X_n) obbedisce al TLC.*

Dimostrazione. Poiché $\mathbb{E}(X_j) = m$ e $V(X_j) = \sigma^2$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha, indicando con X una qualsiasi v.a. della successione e con F la f.r. comune,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\{|X_j-m_j|\geq\varepsilon c_n\}} (X_j - m_j)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\qquad = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\{|x-m|\geq\varepsilon\sigma\sqrt{n}\}} (x - m)^2 \, \mathrm{d}F(x) \\ &\qquad = \frac{1}{\sigma^2} \int\limits_{\{|x-m|\geq\varepsilon\sigma\sqrt{n}\}} (x - m)^2 \, \mathrm{d}F(x) \,. \end{aligned}$$

Posto $A_n := \{|X - m| \geq \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}$, la successione (A_n) è decrescente e ha come limite l'intersezione $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$; ora

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| = +\infty\}\right) = 0\,,$$

ma allora, ricordando che $(X - m)^2 \cdot \mathbb{P}$ è una misura finita, perché X appartiene a L^2 (e, dunque, anche a L^1), è

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} (X - m)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0\,,$$

che conclude la dimostrazione. □

Il Corollario che abbiamo appena dimostrato riguarda il caso che in letteratura è solitamente indicato come il caso i.i.d., vale a dire di v.a. *i*ndipendenti ed *i*denticamente *d*istribuite.

Si osservi che il Corollario 4.1.2, ma anche 4.1.1, si applica, in particolare, al caso delle prove bernoulliane. Sia, infatti, S_n il numero di successi in n prove indipendenti. Posto $\sigma^2 := V(X_j) = p\,q$, si ha $\mathbb{E}(S_n) = np$, $c_n^2 = np\,q$, onde

$$T_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\,;$$

si ritrova cosí il teorema integrale di de Moivre–Laplace.

Corollario 4.1.3. (Teorema di Lyapunov). *Se $\delta > 0$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti di $L^{2+\delta}$. Se è verificata la condizione di Lyapunov*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{c_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(|X_j - m_j|^{2+\delta}\right) = 0\,, \tag{4.1.2}$$

allora (X_n) obbedisce al TLC.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|X_j - m_j|^{2+\delta}\right) &= \int |X_j - m_j|^{2+\delta} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\geq \int_{\{|X_j - m_j| \geq \varepsilon c_n\}} |X_j - m_j|^{2+\delta} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \geq \varepsilon^\delta c_n^\delta \int_{\{|X_j - m_j| \geq \varepsilon c_n\}} (X_j - m_j)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P}\,,\end{aligned}$$

sicché

$$\frac{1}{c_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{|X_j - m_j| \geq \varepsilon c_n\}} (X_j - m_j)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \frac{1}{\varepsilon^\delta c_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(|X_j - m_j|^{2+\delta}\right)\,.$$

L'asserto segue ora dalla (4.1.1) e dalla (4.1.2). □

Dimostrazione del Teorema 4.1.1. Senza perdita di generalità, si può supporre che sia $m_j = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Infatti, se il teorema è dimostrato con quest'ultima restrizione, si ponga $Y_j := X_j - m_j$ onde $\mathbb{E}(Y_j) = 0 \quad (j \in \mathbb{N})$, $S'_n := \sum_{j=1}^n Y_j \quad (n \in \mathbb{N})$; ma allora si ha $T'_n = T_n$. Poiché

$$\int\limits_{\{|X_j - m_j| \geq \varepsilon c_n\}} (X_j - m_j)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_{\{|Y_j| \geq \varepsilon c_n\}} Y_j^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} \,,$$

la condizione di Lindeberg vale per le successioni (Y_n) e (X_n), onde sia T'_n sia T_n convergono in legge a $N(0,1)$.

Sarà opportuno usare le seguenti relazioni, che sono facili conseguenze degli sviluppi in serie, nel campo complesso, delle funzioni in questione (si vedano gli esercizî)

$$e^{iy} = 1 + iy + \theta(y)\frac{y^2}{2} \quad (y \in \mathbb{R}, |\theta(y)| \leq 1)\,, \tag{4.1.3}$$

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} + \theta_1(y)\frac{|y|^3}{6} \quad (y \in \mathbb{R}, |\theta_1(y)| \leq 1)\,, \tag{4.1.4}$$

$$\operatorname{Log}\,(1+z) = z + \theta_2(z)|z|^2 \quad (z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1/2, |\theta_2(z)| \leq 1)\,, \tag{4.1.5}$$

ove, mediante Log, si è indicato il ramo principale del logaritmo. È noto, infatti, che, poiché la funzione $z \mapsto e^{iz}$ è periodica di periodo $i\pi$, un numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$ ha come logaritmo, nel campo complesso, $\ln z = \ln \rho + i(\theta + n\pi)$, ove $n \in \mathbb{Z}$, sicché il logaritmo non è una funzione nel campo complesso. Per far sí che si possa definire il logaritmo di un numero complesso come funzione si considera *ramo principale* del logaritmo che corrisponde alla scelta del valore $n = 0$ nell'ultima formula; in questo modo, $\operatorname{Log} 1 = 0$. Nello studio delle funzioni caratteristiche si sa che ogni funzione caratteristica φ è tale che $\varphi(0) = 1$; si impone, quindi, che il suo logaritmo si annulli nell'origine, $\ln \varphi(0) = 0$; ciò equivale a scegliere il ramo principale del logaritmo.

Se φ_j è la f.c. di X_j, la f.c di T_n è

$$\begin{aligned}
\varphi_{T_n}(t) &= \mathbb{E}\left(\exp(itT_n)\right) = \mathbb{E}\left(\exp(itS_n)/c_n\right) \\
&= \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{c_n}\right) = \prod_{j=1}^n \varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) .
\end{aligned}$$

Ora, per la (4.1.3) e per la (4.1.4), risulta, essendo F_j la f.r. di X_j,

$$\begin{aligned}
\varphi_j(t) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(itx) \, \mathrm{d}F_j(x) \\
&= \int\limits_{\{|x| \geq \varepsilon c_n\}} \left(1 + itx + \theta\frac{t^2x^2}{2}\right) \, \mathrm{d}F_j(x) \\
&+ \int\limits_{\{|x| < \varepsilon c_n\}} \left(1 + itx - \frac{t^2x^2}{2} + \theta_1\frac{|t|^3|x|^3}{6}\right) \, \mathrm{d}F_j(x) \,.
\end{aligned}$$

Si noti che, benché nell'ultimo integrale compaia la potenza $|x|^3$, e benché non si sia supposto che Y_j appartenga a L^3, l'integrale esiste finito perché esso è esteso all'insieme $\{|x| < \varepsilon c_n\}$, nel quale l'integrando è limitato. Poiché

$$\int_{\mathbb{R}} itx \; \mathrm{d}F_j(x) = it\,\mathbb{E}(X_j) = 0\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) &= 1 + \left(\frac{t^2}{2c_n^2}\right) \int_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}} \theta x^2 \; \mathrm{d}F_j(x) \\ &\quad - \left(\frac{t^2}{2c_n^2}\right) \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} x^2 \; \mathrm{d}F_j(x) + \left(\frac{|t|^3}{6c_n^3}\right) \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} \theta_1 |x|^3 \; \mathrm{d}F_j(x)\,.\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Ora

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}} \theta x^2 \; \mathrm{d}F_j(x) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}} x^2 \; \mathrm{d}F_j(x)$$

e perciò esiste $\theta_3 \in \mathbb{C}$ tale che $|\,\theta_3| \leq \frac{1}{2}$ e che

$$\frac{1}{2} \int_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}} \theta x^2 \; \mathrm{d}F_j(x) = \theta_3 \int_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}} x^2 \; \mathrm{d}F_j(x)\,. \tag{4.1.7}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{6} \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} \theta_1 |x|^3 \; \mathrm{d}F_j(x) \right| &\leq \frac{1}{6} \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} |x|^3 \; \mathrm{d}F_j(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon c_n}{6} \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} |x|^2 \; \mathrm{d}F_j(x)\,;\end{aligned}$$

esiste perciò una costante $\theta_4 \in \mathbb{C}$ tale che $|\,\theta_4| \leq 1/6$ e che

$$\frac{1}{6} \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} \theta_1 |x|^3 \; \mathrm{d}F_j(x) = \theta_4\,\varepsilon\,c_n \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} x^2 \; \mathrm{d}F_j(x)\,. \tag{4.1.8}$$

Pertanto, posto per $n \in \mathbb{N}$ e per $j \leq n$,

$$\alpha_{nj} := \frac{1}{c_n^2} \int_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}} x^2 \; \mathrm{d}F_j(x)\,, \tag{4.1.9}$$

$$\beta_{nj} := \frac{1}{c_n^2} \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} x^2 \; \mathrm{d}F_j(x)\,, \tag{4.1.10}$$

l'equazione (4.1.6) diviene $\varphi_j(t/c_n) = 1 + \gamma_{nj}$, ove, in virtú delle (4.1.7), (4.1.8), (4.1.9) e (4.1.10),

$$\gamma_{nj} := \theta_3 t^2 \alpha_{nj} - \frac{1}{2} t^2 \beta_{nj} + |t|^3 \varepsilon \theta_4 \beta_{nj}\,. \tag{4.1.11}$$

Alla luce della (4.1.9), la condizione di Lindeberg (4.1.1) si legge

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{nj}=0\,.$$

Inoltre è

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{nj}+\beta_{nj})=1\,,$$

sicché l'ipotesi (4.1.1) dà

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}=1\,.$$

Poiché $\beta_{nj}\le\varepsilon^2$, segue dalla (4.1.11) che, per $\varepsilon<\sqrt{6}$, e per n abbastanza grande, diciamo per $n\ge n_0$,

$$\begin{aligned}\max\{|\gamma_{nj}|:j\le n\}&=\max_{j\le n}\left|\theta_3 t^2\alpha_{nj}-\frac{\beta_{nj}t^2}{2}+|t|^3\varepsilon\theta_4\beta_{nj}\right|\\&\le\max_{j\le n}\left(\frac{t^2\alpha_{nj}}{2}+\frac{t^2\beta_{nj}}{2}+\frac{|t|^3\varepsilon^3}{6}\right)\le\varepsilon^2t^2+\varepsilon|t|^3\end{aligned}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{nj}|\le\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{t^2\alpha_{nj}}{2}+\frac{t^2\beta_{nj}}{2}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{|t|^3\varepsilon\beta_{nj}}{6}\le\frac{t^2}{2}+\varepsilon|t|^3\,.$$

Scende ora dalla (4.1.5) che

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{2}+\operatorname{Log}\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{c_n}\right)&=\frac{t^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Log}\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right)\\&=\frac{t^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Log}(1+\gamma_{nj})=\frac{t^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(\gamma_{nj}+\theta_2|\gamma_{nj}|^2\right)\,,\end{aligned}$$

e dalla (4.1.11) che

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{nj}=-\frac{1}{2}\,t^2\,;$$

e, poiché

$$\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{nj}|^2\le\left(\max_{j\le n}|\gamma_{nj}|\right)\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{nj}|\,,$$

segue che, scelto $\delta>0$ arbitrariamente, si può determinare, subordinatamente a δ e a t, ε sufficientemente piccolo perché risulti, per $n\ge n_0$,

$$\left|\frac{t^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Log}(1+\gamma_{nj})\right|<\delta\,.$$

Siccome la funzione esponenziale è continua, l'espressione

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\prod_{j=1}\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\prod_{j=1}(1+\gamma_{nj})\\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Log}(1+\gamma_{nj})\right)\end{aligned}$$

tende a 1 al tendere di n a $+\infty$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_{T_n}(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

che è la f.c. di una v.a. con legge $N(0,1)$. □

Il Corollario 4.1.2 è cosí importante per le applicazioni, in particolare alla Statistica, che vale la pena darne una dimostrazione diretta. Si supponga, senza perdita di generalità, che le v.a della successione (X_n) siano centrate, $\mathbb{E}(X_n)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Allora

$$T_n=\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

e

$$\varphi_{T_n}(t)=\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\prod_{j=1}^{n}\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

ove φ è la f.c. comune delle v.a. della successione data. Pertanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}\varphi_{T_n}(t) &= n\operatorname{Log}\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\\ &= n\operatorname{Log}\left\{1+\left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1\right)\right\}.\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

Poiché X_1 è in L^2 e quindi ammette momento di ordine 2 finito, la f.c. φ è derivabile due volte in un intorno dell'origine, sicché

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\,\varphi'(0)+\frac{1}{2}t^2\,\varphi''(0)+O\left(t^3\right).$$

Ma le v.a. della successione sono centrate sicché $\varphi'(0)=0$; inoltre, $\varphi''(0)=-\sigma^2$, sicché

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= 1+\frac{t^2}{2\,\sigma^2\,n}\,\varphi''(0)+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\ &= 1-\frac{t^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}\tag{4.1.13}$$

Sostituendo la (4.1.13) nella (4.1.12) si ottiene

$$\operatorname{Log}\varphi_{T_n}(t)=n\operatorname{Log}\left\{1-\frac{t^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right\}$$

e di qui, sviluppando in serie il logaritmo,

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} \varphi_{T_n}(t) &= n\left\{-\frac{t^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right\}-\frac{n}{2}\left\{-\frac{t^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right\}^2 \\ &\quad + n\,O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{t^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{t^2}{2}\,,\end{aligned}$$

cioè l'asserto.

Il TLC si può estendere a "schemi triangolari".

Teorema 4.1.2. *Nello spazio L^2, per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano X_{nj} n v.a. ($j = 1, 2, \dots, n$) indipendenti e centrate, $\mathbb{E}(X_{nj}) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$; $j = 1, 2, \dots, n$). Si supponga che sia*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_{nj}^2\right) = \sum_{j=1}^{n} V\left(X_{nj}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2 > 0\,; \tag{4.1.14}$$

se, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{|X_{nj}|\geq\varepsilon\}} X_{nj}^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0\,, \tag{4.1.15}$$

allora la successione (S_n) con $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_{nj}$ converge in legge a $N(0, \sigma^2)$.

Dimostrazione. Siano φ_{nj} e σ_{nj} rispettivamente la f.c. e la varianza di X_{nj}. è noto (si vedano gli esercizî del Capitolo 6) che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{nj}(t) - \left(1-\frac{1}{2}\,\sigma_{nj}^2\,t^2\right)\right| &\leq \mathbb{E}\left(\frac{|t|^2\,|X_{nj}|^3}{j!} \wedge \frac{2\,|t|^2\,|X_{nj}|^2}{2!}\right) \\ &\leq \frac{|t|^3}{6} \int_{\{|X_{nj}|\leq\varepsilon\}} |X_{nj}|^3 \,\mathrm{d}\mathbb{P} + t^2 \int_{\{|X_{nj}|>\varepsilon\}} X_{nj}^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,.\end{aligned}$$

Sommando su j e facendo tendere n a $+\infty$ si ottiene, ricorrendo alla (4.1.14) e alla (4.1.15),

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_{nj}(t) - \left(1-\frac{1}{2}\,\sigma_{nj}^2\,t^2\right)\right| \leq \frac{\varepsilon\,|t|^3\,\sigma^2}{6}\,,$$

che, per l'arbitrarietà di ε, dà

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_{nj}(t) - \left(1-\frac{1}{2}\,\sigma_{nj}^2\,t^2\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Si sa dagli esercizî che, se $z_1, z_2, \dots, z_n$ e $z_1', z_2', \dots, z_n'$ sono numeri complessi con $|z_j| \leq 1$ e $|z_j'| \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$), allora

$$\left|\prod_{j=1}^{n} z_j - \prod_{j=1}^{n} z_j'\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|z_j - z_j'\right|\,.$$

Quest'ultima diseguaglianza dà

$$\left| \prod_{j=1}^{n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2}\,\sigma_{nj}^2\, t^2\right) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,. \tag{4.1.16}$$

Si sa ancora (di nuovo, si vedano gli esercizî) che, se a_{nj} ($n \in \mathbb{N}$; $j = 1, 2 \ldots, n$) sono numeri complessi tali che

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} |\, a_{nj}|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,, \tag{4.1.17}$$

allora

$$\prod_{j=1}^{n} (1 - a_{nj}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\alpha}\,. \tag{4.1.18}$$

Si prenda ora $a_{nj} := t^2\,\sigma_{nj}^2/2$, sicché la (4.1.14) dà la prima delle (4.1.17) con $\alpha = t\,\sigma^2/2$. Si osservi che

$$\begin{aligned} \sigma_{nj}^2 &= \int_{\{|X_{nj}|\le\varepsilon\}} \cdots + \int_{\{|X_{nj}|>\varepsilon\}} X_{nj}^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \varepsilon + \int_{\{|X_{nj}|>\varepsilon\}} X_{nj}^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,. \end{aligned}$$

Perciò la prima delle (4.1.15) implica, per l'arbitrarietà di ε,

$$\sup_{j\le n} \sigma_{nj}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Pertanto

$$\frac{t^2}{4} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^2 \le \frac{t^2}{4} \left(\sup_{j\le n} \sigma_{nj}^2\right) \sum_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,,$$

ciò che assicura che sia verificata anche la seconda delle (4.1.17). La (4.1.18) dà dunque

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2}\, t^2\, \sigma_{nj}^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{1}{2}\,\sigma^2\, t^2\right)\,;$$

l'asserto segue ora dalla (4.1.16). □

4.2 TLC: condizioni necessarie

Prima di mostrare, con un esempio, che la condizione di Lindeberg (4.1.1) non è necessaria per la convergenza in legge a $N(0, 1)$, occorre provare il seguente

Lemma 4.2.1. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti di L^2 che soddisfaccia alla condizione di Lindeberg* (4.1.1). *Risulta allora, per ogni $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{j\le n} \mathbb{P}\left(\frac{|X_j - m_j|}{c_n} \ge \varepsilon\right) = 0\,. \tag{4.2.1}$$

Dimostrazione. Poiché una somma di termini positivi è maggiore di ciascuno dei suoi addendi e, dunque, in particolare del maggiore di essi, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{|X_j-m_j|\geq\varepsilon\, c_n\}}(X_j-m_j)^2\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ \geq \varepsilon^2\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}\left(|X_j-m_j|\geq\varepsilon\, c_n\right)\geq\varepsilon^2\max_{j\leq n}\mathbb{P}\left(|X_j-m_j|\geq\varepsilon\, c_n\right)\,,\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Si può ora costruire una successione di v.a. indipendenti tale che la (4.2.1) sia violata mentre la successione (T_n) converge in legge a $N(0,1)$; alla luce del lemma appena dimostrato, si ha allora la convergenza di (T_n) a $N(0,1)$ senza che sia soddisfatta la condizione di Lindeberg.

Esempio 4.2.1. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, ognuna delle quali abbia legge normale di speranza nulla e varianza $V(X_n)=\sigma_n^2=2^{n-2}$ se $n\geq 2$, mentre $V(X_1)=1$. Ora, per $n\geq 2$, si ha

$$c_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2=1+\sum_{j=2}^{n}2^{j-2}=1+\sum_{j=0}^{n-2}2^j=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}\,;$$

dunque, X_n/c_n è una v.a. con legge normale di speranza nulla e varianza data da

$$V\left(\frac{X_n}{c_n}\right)=\frac{V(X_n)}{c_n^2}=\frac{2^{n-2}}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\,.$$

Pertanto

$$\max_{j\leq n}\mathbb{P}\left(|X_j|\geq\varepsilon\, c_n\right)\geq\mathbb{P}\left(|X_n|\geq\varepsilon\, c_n\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x>0\,,$$

che è una costante indipendente tanto da j quanto da n. Poiché la (4.2.1) non è verificata, non può esserlo neanche la (4.1.1). D'altra parte, però, se $T_n=S_n/c_n$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{T_n}(t)&=\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{c_n}\right)=\varphi_{S_n}\left(t\,2^{-\frac{n-1}{2}}\right)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j\left(t\,2^{-\frac{n-1}{2}}\right)\\&=\exp\left(-\frac{t^2}{2^n}\right)\prod_{j=2}^{n}\exp\left(-\frac{2^{j-2}\,t^2}{2^n}\right)=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,;\end{aligned}$$

perciò T_n ha legge $N(0,1)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, di modo che (T_n) converge in legge a $N(0,1)$. ■

Se, di piú, si impone che sia verificata la (4.2.1), la condizione di Lindeberg è necessaria oltreché sufficiente per la convergenza della successione (T_n) alla legge $N(0,1)$.

Teorema 4.2.1. *Per una successione di v.a. indipendenti di L^2 sono equivalenti le affermazioni:*

(a) *vale la condizione di Lindeberg* (4.1.1)*;*

(b) *la successione* (T_n) *converge in legge a* $N(0,1)$ *e, inoltre, è verificata la* (4.2.1).

L'implicazione (a) $\Longrightarrow$ (b) è conseguenza del teorema 4.1.1 e del Lemma 4.2.1. La dimostrazione dell'implicazione inversa è dovuta a Feller. Occorrerà premetterle alcuni lemmi.

Lemma 4.2.2. (Diseguaglianza di troncamento). *Siano F una f.r. e φ la sua f.c.. Se $t>0$, esiste $k \in]0,+\infty[$ tale che sia*

$$\int\limits_{\{|x|\geq 1/t\}} \mathrm{d}F(x) \leq \frac{k}{t}\int_0^t (1-\Re\varphi(s))\,\mathrm{d}s\,. \tag{4.2.2}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t (1-\Re\varphi(s))\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{t}\int_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} (1-\cos sx)\,\mathrm{d}F(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} dF(x)\int_0^t \frac{1-\cos sx}{t}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\left[s-\frac{\sin sx}{x}\right]_{s=0}^{s=t}\mathrm{d}F(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1-\frac{\sin tx}{tx}\right)\mathrm{d}F(x) \geq \left(\inf_{|t|\geq 1}\left\{1-\frac{\sin t}{t}\right\}\right)\int\limits_{\{|x|\geq 1/t\}} \mathrm{d}F(x)\,.
\end{aligned}$$

Si controlla immediatamente che

$$\inf_{|t|\geq 1}\left\{1-\frac{\sin t}{t}\right\} = 1-\sin 1 \simeq 0.158529 > \frac{1}{7}\,,$$

di modo che la (4.2.2) è valida con $k=7$. □

La proprietà espressa dal prossimo lemma è conosciuta come *trascurabilità asintotica uniforme.*

Lemma 4.2.3. *Siano $(X_{nj})_{n\in\mathbb{N},j\leq n}$ una successione di v.a. e (φ_{nj}) la corrispondente successione di f.c.. Sono allora equivalenti le condizioni:*

(a) *per ogni $\varepsilon>0$, la successione (X_n) soddisfà alla relazione*

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{j\leq n}\mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon)=0\,;$$

(b) $\lim_{n\to+\infty}\max_{j\leq n}|\varphi_{nj}(t)-1|=0$ *uniformemente in ogni intervallo limitato.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b)

$$\begin{aligned}\max_{j\le n}|\varphi_{nj}(t)-1| &\le \max_{j\le n}\int_{\mathbb{R}}\left|e^{itx}-1\right|\,\mathrm{d}F_{nj}(x)\\ &\le \max_{j\le n}\int_{\{|x|<\varepsilon\}}\left|e^{itx}-1\right|\,\mathrm{d}F_{nj}(x)+\max_{j\le n}\int_{\{|x|\ge\varepsilon\}}\left|e^{itx}-1\right|\,\mathrm{d}F_{nj}(x)\,.\end{aligned}$$

Ora, poiché $|e^{ix}-1|\le|x|$, si ha

$$\begin{aligned}\max_{j\le n}|\varphi_{nj}(t)-1| &\le \max_{j\le n}\int_{\{|x|<\varepsilon\}}|tx|\,\mathrm{d}F_{nj}(x)+2\max_{j\le n}\int_{\{|x|\ge\varepsilon\}}\mathrm{d}F_{nj}(x)\\ &\le |t|\,\varepsilon+2\max_{j\le n}\mathbb{P}(|X_{nj}|\ge\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) In virtú della (4.2.2), risulta

$$\begin{aligned}\max_{j\le n}\mathbb{P}(|X_{nj}|\ge\varepsilon) &= \max_{j\le n}\int_{\{|x|\ge\varepsilon\}}\mathrm{d}F_{nj}(x)\\ &\le \max_{j\le n}7\,\varepsilon\int_0^{1/\varepsilon}(1-\Re\varphi_{nj}(t))\,\mathrm{d}s\le 7\,\varepsilon\int_0^{1/\varepsilon}\max_{j\le n}|\varphi_{nj}(t)-1|\,\mathrm{d}s\,,\end{aligned}$$

poiché $|1-\Re z|=|\Re(1-z)|\le|1-z|$. Grazie all'ipotesi ed al teorema di convergenza dominata, vale la condizione (a). □

Il seguente lemma serve a richiamare un risultato dell'analisi elementare.

Lemma 4.2.4. *Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali tali che*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=0\,;$$

allora si ha

$$\limsup_{n\to+\infty}|\,a_n|=\limsup_{n\to+\infty}|\,b_n|\,.$$

Dimostrazione. In virtú dell'ipotesi, si ha, definitivamente, $|a_n+b_n|<\varepsilon$, per ogni $\varepsilon>0$; equivalentemente, $-\varepsilon<a_n+b_n<\varepsilon$, relazione dalla quale scendono le due diseguaglianze, entrambe valide definitivamente,

$$-a_n<b_n+\varepsilon<|b_n|+\varepsilon \qquad \text{e} \qquad a_n<-b_n+\varepsilon<|b_n|+\varepsilon$$

onde $|a_n|<|b_n|+\varepsilon$. La diseguaglianza inversa si ottiene scambiando i ruoli delle due successioni. □

Fine della dimostrazione del Teorema 4.2.1. Rimane da dimostrare l'implicazione (b) $\Longrightarrow$ (a). Si mostrerà dapprima che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right)-1\right)\right)=0\,. \tag{4.2.3}$$

Poiché (T_n) converge in legge a $N(0,1)$, si ha

$$\varphi_{T_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \left[\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Perciò

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Log}\left(1 + \left[\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right]\right) = -\frac{t^2}{2}$$

e, per la (4.1.5), con un opportuno ν_j tale che $|\nu_j| \le 1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2} + \sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right) + \sum_{j=1}^{n} \nu_j \left|\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right|^2\right) = 0\,,$$

onde, in virtú del Lemma 4.2.4,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{t^2}{2} + \sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right)\right| \\
&\qquad = \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} |\nu_j| \left|\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right|^2 \qquad (4.2.4)\\
&\qquad \le \limsup_{n\to+\infty}\left(\max_{j\le n}\left|\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right|\right) \sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right|.
\end{aligned}$$

Ora, per l'ipotesi e per il Lemma 4.2.3, è

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{j\le n}\left|\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right| = 0\,,$$

e inoltre, tenendo conto della (4.1.3), si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right) - 1\right| &= \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}}\left[\exp\left(\frac{itx}{c_n}\right) - 1\right]\, \mathrm{d}F_j(x)\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}} \theta\, \frac{t^2x^2}{2c_n^2}\, \mathrm{d}F_j(x)\right| \le \frac{t^2}{2c_n^2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 = \frac{t^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

La (4.2.3) è dunque conseguenza della (4.2.4).

Si dimostrerà quindi che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{c_n^2}\sum_{j=1}^{n} \int_{\{|x|<\varepsilon c_n\}} x^2\, \mathrm{d}F_j(x)\right) \le \frac{4}{\varepsilon^2 t^2}\,. \qquad (4.2.5)$$

Per la (4.2.3), è

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} \Re\left[1 - \varphi_j\left(\frac{t}{c_n}\right)\right]\right) = 0\,,$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{t^2}{2}-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|<\varepsilon c_n\}}\cdots-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}}\left(1-\cos\frac{tx}{c_n}\right)\,\mathrm{d}F_j(x)\right\}=0\,,$$

di modo che, applicando il Lemma 4.2.4, si ottiene

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{t^2}{2}-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|<\varepsilon c_n\}}\left(1-\cos\frac{tx}{c_n}\right)\,\mathrm{d}F_j(x)\right|$$
$$=\limsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}}\left(1-\cos\frac{tx}{c_n}\right)\,\mathrm{d}F_j(x)\right|\,. \tag{4.2.6}$$

Ma

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|<\varepsilon c_n\}}\left(1-\cos\frac{tx}{c_n}\right)\,\mathrm{d}F_j(x)\leq\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|<\varepsilon c_n\}}\frac{t^2x^2}{2c_n^2}\,\mathrm{d}F_j(x)$$
$$\leq\frac{t^2}{2c_n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2=\frac{t^2}{2}\,,$$

ciò che mostra come nella (4.2.6) si possano eliminare i valori assoluti. Dalla stessa (4.2.6) scende ora che

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{1}{c_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|<\varepsilon c_n\}}x^2\,\mathrm{d}F_j(x)\right)$$
$$\leq\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2}-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|<\varepsilon c_n\}}\left(1-\cos\frac{tx}{c_n}\right)\,\mathrm{d}F_j(x)\right)$$
$$=\limsup_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}}\left(1-\cos\frac{tx}{c_n}\right)\,\mathrm{d}F_j(x)\,.$$

D'altro canto, la diseguaglianza di Čebyšev dà

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}}\left(1-\cos\frac{tx}{c_n}\right)\,\mathrm{d}F_j(x)\leq\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\{|x|\geq\varepsilon c_n\}}\mathrm{d}F_j(x)$$
$$=2\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}\left(|X_j|\geq\varepsilon c_n\right)\leq\frac{2}{\varepsilon^2c_n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2=\frac{2}{\varepsilon^2}\,,$$

sicché la (4.2.5) è dimostrata. Per dimostrare che vale la condizione di Lindeberg (4.1.1) basta ora far tendere t a $+\infty$ nella (4.2.5). $\square$

4.3 LGN: leggi deboli

In questa sezione e nella seguente supporremo, senza che ciò sia richiamato esplicitamente nel seguito, che sia assegnato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e che tutte le v.a. che saranno considerate siano definite in tale spazio.

Definizione 4.3.1. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. di L^1: si dice che la successione (X_n) obbedisce alla *Legge dei Grandi Numeri* (LGN) se, posto $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, la v.a.

$$Z_n := \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}$$

converge a zero. Si parlerà di LGN *debole* se la convergenza avviene in probabilità, di LGN *forte* se quasi certamente. $\diamond$

Teorema 4.3.1. (Markov). *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti di L^2 con $V(X_n) = \sigma_n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se vale la condizione di Markov*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = 0\,, \tag{4.3.1}$$

(X_n) obbedisce alla legge debole dei grandi numeri.

Dimostrazione. Al solito non è restritivo supporre che le v.a. della successione (X_n) siano tutte centrate, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Se $Z_n := S_n/n$, si ha, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2\, n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2\, n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2\,,$$

che dà l'asserto in virtú della (4.3.1). $\square$

L'ipotesi d'indipendenza è, in effetti, ridondante, perché basta supporre che le v.a. della successione (X_n) siano a due a due incorrelate. La condizione (4.3.1) è, in particolare, soddisfatta se le varianze sono uniformemente limitate: $\sigma_n^2 \leq A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In quest'ultima ipotesi vale, però, la legge forte (si veda il successivo Teorema 4.4.1).

Teorema 4.3.2. *Se la successione (X_n) di v.a. di L^1 obbedisce alla LGN forte, allora la successione*

$$\left(\frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{n}\right)$$

converge a 0 *q.c..*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che le v.a. siano tutte centrate (vale a dire $\mathbb{E}(X_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Posto, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, l'ipotesi è che si abbia

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{q.c..}$$

Ora

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{S_{n-1}}{n-1}\,,$$

onde l'asserto. $\square$

Mostriamo con un esempio che una succesione (X_n) di v.a. può obbedire alla LGN debole senza obbedire alla LGN forte.

Esempio 4.3.1. Sia $(X_n)_{n\geq 2}$ una successione di v.a. indipendemti tale che

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n \ln n}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}.$$

Per ogni $n \geq 2$, X_n è in L^1; infatti,

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \frac{1}{\ln n} < +\infty .$$

Inoltre

$$\mathbb{E}(X_n) = 0 \qquad \text{e} \qquad V(X_n) = \|X_n\|_2^2 = \frac{n}{\ln n}.$$

La funzione $x \mapsto \varphi(x) := x/\ln x$ è crescente per $x > e$. Perciò, se $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n} V(X_j) &= \frac{1}{n^2}\frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=3}^{n} V(X_j) \\ &\leq \frac{1}{n^2}\frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{n^2}\frac{(n-2)n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .\end{aligned}$$

La successione (X_n) soddisfà, dunque, alla condizione di Markov (4.3.1) e verifica, quindi, la LGN debole. Essa non obbedisce, però, alla legge forte. Infatti, se cosí fosse, si avrebbe, come si è visto sopra, $X_n/n \to 0$ q.c..

Sia ora, per $\varepsilon > 0$, $A_n(\varepsilon) := \{|X_n| \geq n\varepsilon\}$. Gli eventi $A_n(\varepsilon)$ sono indipendenti.

È facile verificare che $X_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ q.c. equivale a

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n^c(\varepsilon)\right) = 1 .$$

Infatti, quest'ultima condizione equivale a dire che si ha definitivamente e q.c. $\left|\frac{X_n}{n}\right| < \varepsilon$, cioè $\frac{X_n}{n} \to 0$ q.c.. D'altro canto, per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ risulta

$$\mathbb{P}\left(A_n(\varepsilon)\right) = \mathbb{P}\left(|X_n| \geq n\varepsilon\right) = \frac{1}{n \ln n},$$

onde

$$\sum_{n\geq 2} \mathbb{P}\left(A_n(\varepsilon)\right) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n} = +\infty ,$$

sicché il secondo lemma di Borel–Cantelli dà

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n(\varepsilon)\right) = 1 ,$$

ossia

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n^c(\varepsilon)\right) = 0 .$$

■

Teorema 4.3.3. (Khinchin). *Se le v.a. della successione (X_n) sono in L^1, indipendenti e isonome, la successione obbedisce alla LGN debole.*

Dimostrazione. Si può supporre, senza perdita di generalità, che le v.a. della successione siano centrate, cioè $\mathbb{E}(X_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In virtú del teorema (5.3.12), basta mostrare che $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_n$ tende a zero in legge; ma ciò equivale, per il teorema (6.6.5), a mostrare che $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{Z_n}(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, oppure, equivalentemente, che $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Log}\varphi_{Z_n}(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia φ la f.c. comune delle v.a. X_n. L'ipotesi d'indipendenza dà allora

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n ,$$

onde

$$\operatorname{Log}\varphi_{Z_n}(t) = n \operatorname{Log}\varphi\left(\frac{t}{n}\right) .$$

Dallo sviluppo (4.1.3) e da $\mathbb{E}(X_n) = 0$ segue $\varphi(t) = 1 + o(t)$, onde

$$\operatorname{Log}\varphi_{Z_n}(t) = n \operatorname{Log}\left[1 + o\left(\frac{t}{n}\right)\right] = n\, o\left(\frac{t}{n}\right) .$$

Perciò $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Log}\varphi_{Z_n}(t) = 0$. □

Si vedrà oltre che nelle stesse ipotesi dell'ultimo teorema vale la legge forte (Teorema 4.4.3).

Teorema 4.3.4. *Per una successione (X_n) di v.a. isonome e indipendenti di L^1 sono equivalenti le condizioni:*

(a) *esiste una successione (α_n) di numeri reali tale che*

$$\frac{S_n}{n} - \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0 ;$$

(b) $\lim_{n\to+\infty} n\,\mathbb{P}(|X_1| > n) = 0$.

Se vale una di queste condizioni si può prendere $\alpha_n = \mathbb{E}\left(X_1\,\mathbf{1}_{\{|X_1|\le n\}}\right)$.

Dimostrazione. Dimostreremo la sola implicazione (b) $\Longrightarrow$ (a). Si considerino le v.a. troncate $X_{nk} := X_k\,\mathbf{1}_{\{|X_k|\le n\}}$ e si ponga $S_n' := \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$ e $\alpha_n := \mathbb{E}\left(X_1\,\mathbf{1}_{\{|X_1|\le n\}}\right)$. Allora $\alpha_n = \mathbb{E}(S_n'/n)$. Poiché

$$\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \alpha_n\right| > \varepsilon\right\} \subseteq \left\{\left|\frac{S_n'}{n} - \alpha_n\right| > \varepsilon\right\} \bigcup \{S_n \ne S_n'\} ,$$

si ha

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \alpha_n\right| > \varepsilon\right) \le \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n'}{n} - \alpha_n\right| > \varepsilon\right) + \mathbb{P}(S_n \ne S_n') . \tag{4.3.2}$$

Si osservi ora che

$$\{S_n \ne S_n'\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \ne X_{nk}\} ,$$

sicché

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \neq S_n') &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \neq X_{nk}) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k| > n) = n\,\mathbb{P}(|X_1| > n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

Quanto all'altro termine al secondo membro della (4.3.2), si ha, dalla diseguaglianza di Čebyšev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n'}{n} - \alpha_n\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n')}{n^2\,\varepsilon^2} = \frac{V(X_{n1}')}{n\,\varepsilon^2} \leq \frac{\mathbb{E}(X_{n1}'^2)}{n\,\varepsilon^2}\,. \tag{4.3.3}$$

D'altro canto,

$$\mathbb{E}(X_{n1}'^2) = \int_0^{+\infty} 2t\,\mathbb{P}(X_{n1}' > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n 2t\,\mathbb{P}(|X_1| > t)\;\mathrm{d}t\,.$$

L'ipotesi fatta implica che sia

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_{n1}'^2)}{n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n 2\,t\,\mathbb{P}(|X_1| > t)\;\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2n\,\mathbb{P}(|X_1| > n) = 0\,,\end{aligned}$$

e, quindi, l'asserto, in virtú della (4.3.3).

La dimostrazione dell'implicazione inversa si può trovare in (Feller, 1971) Teorema V.7.1.. □

4.4 LGN: leggi forti

Diamo ora un primo esempio di LGN forte.

Teorema 4.4.1. (Rajchman, 1932). *Se le v.a. della successione (X_n) sono a due a due incorrelate e hanno varianze uniformemente limitate in L^2 (cioè $V(X_n) \leq H^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), allora la successione (X_n) obbedisce alla LGN forte.*

Dimostrazione. Si può supporre, senza perdita di generalità, che la v.a. della successione data siano centrate, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, l'ipotesi di limitatezza uniforme in L^2 dà $\sigma_n^2 \leq H^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; cosí,

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \leq \frac{H^2}{n}\,.$$

Dalla diseguaglianza di Čebyšev si ottiene

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{H^2}{n\,\varepsilon^2}\,,$$

sicché, sommando su n, la serie a secondo membro diverge; limitandosi, però, alla sottosuccessione (S_{n^2}), si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{H^2}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2},$$

che è convergente; adesso, il primo lemma di Borel–Cantelli assicura che sia

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Perciò è

$$\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}\right| \leq \varepsilon$$

definitivamente fuorché in un insieme B_ε, dipendente da ε, di probabilità nulla, $\mathbb{P}(B_\varepsilon) = 0$. Pertanto

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{q.c.}.$$

Se il numero naturale k non è un quadrato perfetto, esiste un altro numero naturale n tale che sia $n^2 < k < (n+1)^2$. Posto

$$D_n := \max\left\{|S_k - S_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\right\},$$

si ha, per $n^2 < k < (n+1)^2$,

$$\frac{|S_k|}{k} = \frac{|S_k - S_{n^2} + S_{n^2}|}{k} \leq \frac{|S_{n^2}| + D_n}{k} \leq \frac{|S_{n^2}| + D_n}{n^2};$$

basterà allora, per concludere la dimostrazione, far vedere che

$$\frac{D_n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{q.c.}.$$

Ora

$$D_n^2 \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} (X_{n^2+1} + X_{n^2+2} + \cdots + X_k)^2,$$

onde, poiché le v.a. della successione sono centrate e a due a due incorrelate,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_n^2) &\leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \left\{\mathbb{E}(X_{n^2+1}^2) + \mathbb{E}(X_{n^2+1}^2) + \cdots + \mathbb{E}(X_k^2)\right\} \\ &\leq 2n \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} H^2 = 4\,n^2\,H^2.\end{aligned}$$

Perciò

$$\mathbb{P}\left(\frac{D_n}{n^2} > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}(D_n^2)}{n^4\,\varepsilon^2} \leq \frac{4\,H^2}{n^2\,\varepsilon^2};$$

mediante quest'ultima diseguaglianza, ricorrendo nuovamente al primo lemma di Borel–Cantelli, si conclude che $D_n/n^2 \to 0$ q.c.. □

Si osservi che il teorema di Rajchman si applica, in particolare, ad una successione di v.a. indipendenti ed isonome; vale, quindi il seguente

Corollario 4.4.1. *Una successione $(X_n) \subseteq L^2$ di v.a. indipendenti, isonome e con varianze uniformemente limitate obbedisce alla LGN.*

Applicato ad una successione di v.a. Bernoulliane indipendenti (X_n) nella quale sia p la probabilità di successo ad ogni prova, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, questo corollario assicura che, nelle stesse ipotesi del Teorema (1.9.8) valga la LGN forte e non solo quella debole.

Osservazione 4.4.1. Si noti che nelle ipotesi del Teorema 4.4.1 si ha anche la convergenza in L^2. Infatti, poiché le v.a. sono incorrelate, si ha

$$\begin{aligned}\left\| \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \right\|_2 &= \mathbb{E}\left[\frac{(S_n - \mathbb{E}(S_n))^2}{n^2} \right] = \frac{V(S_n)}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} V(X_j) \le \frac{H^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \,,\end{aligned}$$

che dà l'asserto. ■

Il risultato che segue rafforza la diseguaglianza di Čebyšev nel caso della somma di v.a. indipendenti.

Teorema 4.4.2. (Diseguaglianza di Kolmogorov).

Dimostrazione. Si ponga

$$A_1 := \{|S_1| \ge \varepsilon\} \,,$$

e, per $j \ge 2$,

$$A_j := \{|S_j| \ge \varepsilon\} \bigcap \left(\bigcap_{k<j} \{|S_k| < \varepsilon\} \right) .$$

Gli insiemi A_j cosí definiti sono misurabili e disgiunti. Inoltre

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \left\{ \max_{j \le n} |S_j| \ge \varepsilon \right\} .$$

Si ha ora, procedendo come nella dimostrazione della diseguaglianza di Čebyšev,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n^2) &\ge \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} S_n^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} \{S_j + (S_n - S_j)\}^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} \left[S_j^2 + 2\, S_j\, (S_n - S_j) + (S_n - S_j)^2 \right] \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\ge \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} \left[S_j^2 + 2\, S_j\, (S_n - S_j) \right] \,\mathrm{d}\mathbb{P} \,.\end{aligned}$$

Poiché A_j e S_j sono funzioni delle v.a. $X_1, X_2, \dots, X_j$, mentre la differenza $S_n - S_j$ è funzione delle v.a. X_{j+1}, X_{j+2}, $\dots$, X_n, che sono indipendenti dalle prime, le v.a. $S_j\,\mathbf{1}_{A_j}$ e $S_n - S_j$, sono pure indipendenti; perciò

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_j} S_j\,(S_n - S_j)\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \mathbb{E}\left[\left(S_j\,\mathbf{1}_{A_j}\right)\,(S_n - S_j)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(S_j\,\mathbf{1}_{A_j}\right)\right]\,\mathbb{E}\left[(S_n - S_j)\right] = 0\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbb{E}(S_n^2) \geq \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{A_j} S_j^2\,\mathrm{d}\mathbb{P} \geq \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^2\,\mathbb{P}(A_j) = \varepsilon^2\,\mathbb{P}\left(\max_{j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right)\,,$$

onde l'asserto. □

Dalla diseguaglianza di Kolmogorov scende l'omonima LGN forte.

Teorema 4.4.3. *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate di L^2; se è convergente la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(X_n)}{n^2} < +\infty\,, \tag{4.4.1}$$

allora la successione (X_n) obbedisce alla LGN forte.

Dimostrazione. Si ponga, per $\varepsilon > 0$,

$$B_n := \bigcup_{2^n\leq j<2^{n+1}} \{|S_j| > j\,\varepsilon\}\,.$$

Se convergesse la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)$, il primo lemma di Borel–Cantelli darebbe

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} B_n\right) = 0\,,$$

e cioè l'asserto. Basta perciò stabilire la convergenza di tale serie. Per un punto $\omega \in B_n$ esiste almeno un indice j con $2^n \leq j < 2^{n+1}$ tale che $|S_j(\omega)|/j > \varepsilon$, sicché

$$\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}\left(\max_{2^n\leq j<2^{n+1}} \frac{|S_j|}{j} > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{2^n\leq j<2^{n+1}} |S_j| > 2^n\,\varepsilon\right)\,,$$

e perciò la diseguaglianza di Kolmogorov dà

$$\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{V(X_j)}{2^{2n}\,\varepsilon^2}\,;$$

di qui, poiché

$$\frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{4}{j^2}\,,$$

per $j \leq 2^{n+1}$ scende

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{\sigma_j^2}{2^{2n}} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{\sigma_j^2}{j^2}$$
$$\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{j^2} < +\infty\,,$$

che dà l'asserto. □

Se le altre condizioni dell'ultimo teorema sono verificate, la successione (X_n) può non obbedire alla LGN forte, se diverge la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^2/n^2$.

Esempio 4.4.1. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti tali che

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2}\,.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\mathbb{E}(X_n) = 0$ e $\sigma_n^2 = n^2$ sicché

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = +\infty\,.$$

Se la successione obbedisse alla LGN forte, si avrebbe $X_n/n \to 0$ q.c., per il Teorema 4.3.2, onde $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}\{|X_n| \geq \varepsilon\, n\}) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$. Il secondo lemma di Borel–Cantelli darebbe dunque

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon\, n) < +\infty\,,$$

mentre, per ogni $\varepsilon \in\,]0,1[$, si ha, in realtà, $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon\, n) = 1$ e, dunque

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon\, n) = +\infty\,.$$

■

Si osservi che, se le v.a. della successione (X_n) sono indipendenti, il Teorema di Rajchman 4.4.1 è una conseguenza immediata della LGN forte di Kolmogorov 4.4.3.

La versione della LGN forte piú utile per le applicazioni, in ispecie per quelle alla statistica matematica, è data nel seguente teorema.

Teorema 4.4.4. (Khinchin–Kolmogorov) *Una successione (X_n) di v.a. di L^1 indipendenti e isonome obbedisce alla LGN forte.*

Dimostrazione. Al solito, non è restrittivo supporre che le variabili della successione siano centrate, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché le v.a. della successione hanno tutte la stessa legge, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_1| \geq n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\geq n} \mathbb{P}(j \leq |X_1| < j+1) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\leq j} \mathbb{P}(j \leq |X_1| < j+1) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} j\,\mathbb{P}(j \leq |X_1| < j+1) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\{j\leq |X_1|<j+1\}} j \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\{j\leq |X_1|<j+1\}} |X_1| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mathbb{E}(|X_1|) < +\infty\,.\end{aligned}$$

Il primo lemma di Borel–Cantelli assicura che sia

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \{|X_n| \geq n\}\right) = 0\,.$$

Perciò, se si definiscono le v.a. "troncate" $Y_n := X_n\,\mathbf{1}_{\{|X_n|<n\}}$, si ha definitivamente $Y_n = X_n$ tranne che in un insieme di probabilità nulla.

Poiché le v.a. Y_n sono limitate, esse appartengono a L^2. Si può quindi applicare il precedente Teorema 4.4.3 alla successione $(Y_n - \mathbb{E}(Y_n))$; per dimostrare che questa obbedisce alla LGN forte, basta verificare la convergenza della serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(Y_n)}{n^2}\,.$$

Ora si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(Y_n)}{n^2} &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}\left(X_1^2\,\mathbf{1}_{\{|X_1|<n\}}\right)}{n^2} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_1^2\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq|X_1|<j\}}\right) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X_1^2\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq|X_1|<j\}}\right) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.\end{aligned}$$

Dalla maggiorazione elementare

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{k^2} + \sum_{n\geq k+1} \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{k^2} + \sum_{n\geq k+1} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq \frac{1}{k} + \int_{k}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{2}{k}\,,\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

segue che

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(Y_n)}{n^2} &\leq 2\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}\left(X_1^2\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq|X_1|<j\}}\right)}{j} \\ &\leq 2\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(|X_1|\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq|X_1|<j\}}\right) = 2\,\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty\,.\end{aligned}$$

D'altro canto, si ha

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|<n\}}) = \mathbb{E}(X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1|<n\}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(X_1) = 0\,,$$

e quindi, dato che la convergenza di una successione implica la sua convergenza allo stesso limite nel senso di Cesàro,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Y_j) = 0\,.$$

Si ha perciò che

$$\frac{1}{n} S'_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to+\infty]{q.c.} 0\,.$$

Ora, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, si ha per $n \in \mathbb{N}$,

$$\{|S_n| < n\,\varepsilon\} \supset \left\{|S'_n| < n\,\varepsilon\right\} \cap \left\{|S_n = S'_n|\right\}\,,$$

e dunque

$$\liminf_{n\to+\infty} \{|S_n| < n\,\varepsilon\} \supset \liminf_{n\to+\infty} \left(\left\{|S'_n| < n\,\varepsilon\right\}\right) \bigcap \liminf_{n\to+\infty} \left(\left\{S_n = S'_n\right\}\right)\,.$$

Si è appena visto che $S'_n/n \to 0$ q.c., sicché

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} \left\{|S'_n| < n\,\varepsilon\right\}\right) = 1\,;$$

per la prima parte della dimostrazione, poiché $Y_n = X_n$ q.c. e definitivamente, si ha

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} \left\{S_n = S'_n\right\}\right) = 1\,.$$

Perciò

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} \{|S_n| < n\,\varepsilon\}\right) = 1\,,$$

vale a dire,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{q.c.}\,,$$

onde l'asserto. □

Lo stesso risultato vale se, anziché supporre che le variabili della successione (X_n)siano indipendenti, esse sono *a due a due indipendenti.*

Teorema 4.4.5. (Etemadi) *Sia (X_n) una successione di v.a. di L^1, isonome e a due a due indipendenti. Allora (X_n) obbedisce alla LGN forte*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{q.c.} \mathbb{E}(X_1)\,.$$

Dimostrazione. Posto, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, si tratta di dimostrare che

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(X_1) \qquad \text{q.c.}.$$

Poiché anche (X_n^+) e (X_n^-) soddisfanno alle stesse ipotesi di (X_n), e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_n^+ - X_n^-$, si può supporre che sia $X_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \geq n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_1 \geq n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\geq n} \mathbb{P}(j \leq X_1 < j+1) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{n\leq j} \mathbb{P}(j \leq X_1 < j+1) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} j\, \mathbb{P}(j \leq X_1 < j+1) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\{j\leq X_1<j+1\}} j \, d\mathbb{P} \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\{j\leq X_1<j+1\}} X_1 \, d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}(X_1) < +\infty \,.
\end{aligned}$$

Il primo lemma di Borel–Cantelli assicura che sia

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \{X_n \geq n\}\right) = 0 \,.$$

Perciò, se si definiscono le v.a. "troncate" $Y_n := X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq n\}}$, si ha definitivamente $Y_n = X_n$ tranne che su un insieme di probabilità nulla. Basta cosí far vedere che, se $S_n' := \sum_{j=1}^n Y_j$, si ha

$$\frac{S_n'}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(X_1) \qquad \text{q.c.}\,.$$

Scelti arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $\alpha > 1$, si ponga $k(n) := [\alpha^n]$ ($[x]$ è la parte intera di x). La diseguaglianza di Čebyšev e l'essere le v.a. a due a due indipendenti, e quindi, *a fortiori*, a due a due incorrelate, dà

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left|S_{k(n)}' - \mathbb{E}\left(S_{k(n)}'\right)\right| > \varepsilon\, k(n)\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(S_{k(n)}')}{k^2(n)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2(n)} \sum_{j=1}^{k(n)} V(Y_j) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{k(n)} V(Y_j) \sum_{n:k(n)\geq j} \frac{1}{k^2(n)} \,,
\end{aligned}$$

ove, nell'ultimo passaggio, è stato usato il teorema di Fubini. Ovviamente, si ha $[\alpha^n] \geq \alpha^n/2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò

$$\begin{aligned}
\sum_{n:k(n)\geq j} \frac{1}{k^2(n)} &= \sum_{n:k(n)\geq j} \frac{1}{[\alpha^n]^2} \leq 4 \sum_{n:k(n)\geq j} \frac{1}{\alpha^{2n}} \\
&\leq \frac{4}{j^2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\alpha^{2k}} = \frac{1}{j^2} \frac{1}{\alpha^2 - 1} \,.
\end{aligned}$$

Dalla maggiorazione (4.4.2) segue, applicando il teorema di Fubini, che

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(Y_n)}{n^2} &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}\,\mathbb{E}\left(X_n^2\,\mathbf{1}_{\{X_n<n\}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_1^2\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq X_1<j\}}) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_1^2\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq X_1<j\}}) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}\left(X_1^2\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq X_1<j\}}\right)}{j} \\ &\leq 2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X_1\,\mathbf{1}_{\{j-1\leq X_1<j\}}\right) = 2\,\mathbb{E}(X_1) < +\infty\,.\end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\left|S'_{k(n)} - \mathbb{E}\left(S'_{k(n)}\right)\right| > \varepsilon\, k(n)\right) &\leq \frac{4}{\varepsilon^2\,(\alpha^2-1)} \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{V(Y_j)}{j^2} \\ &\leq \frac{2\,\mathbb{E}(X_1)}{\varepsilon^2\,(\alpha^2-1)} < +\infty\,.\end{aligned}$$

Il primo lemma di Borel–Cantelli assicura ora che sia

$$\frac{S'_{k(n)} - \mathbb{E}\left(S'_{k(n)}\right)}{k(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{q.c.}\,.$$

Il Teorema 4.4.3 assicura che sia $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(X_1)$, e, quindi, dato che la convergenza di una successione implica la sua convergenza allo stesso limite nel senso di Cesàro,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Y_j) = 0\,.$$

Pertanto

$$\frac{\mathbb{E}\left(S'_{k(n)}\right)}{k(n)} = \frac{1}{k(n)} \sum_{j=1}^{k(n)} \mathbb{E}(Y_j) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(X_1)\,,$$

sicché

$$\frac{S'_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(X_1) \qquad \text{q.c.}.$$

Se il numero naturale k è tale che $k(n) < k < k(n+1)$, si ha, visto che le v.a. X_n, e quindi le Y_n, sono positive,

$$S'_{k(n)} \leq S'_k \leq S'_{k(n+1)}\,;$$

di qui

$$\frac{k(n)}{k}\,\frac{S'_{k(n)}}{k(n)} \leq \frac{S'_k}{k} \leq \frac{S'_{k(n+1)}}{k(n+1)}\,\frac{k(n+1)}{k}\,. \tag{4.4.3}$$

Dalla definizione di $k(n)$ si ottiene

$$k(n) \leq \alpha^n < k(n)+1 \leq k < k(n+1) \leq \alpha^{n+1}\,,$$

onde

$$\frac{k(n+1)}{k} \leq \frac{\alpha^{n+1}}{k} < \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \alpha \quad \text{e} \quad \frac{k(n)}{k} > \frac{\alpha^n - 1}{k} > \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}}\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ nella (4.4.3), si ottiene

$$\frac{1}{\alpha}\,\mathbb{E}(X_1) \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{S'_k}{k} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{S'_k}{k} \le \alpha\,\mathbb{E}(X_1)\,,$$

che dà l'asserto in virtú dell'arbitrarietà di $\alpha > 1$. $\square$

Il Teorema 4.4.4 è ora un corollario banale del Teorema 4.4.5.

A completamento della diseguaglianza di Kolmogorov diamo la seguente diseguaglianza dovuta a Paul Lévy.

Lemma 4.4.1. (Diseguaglianza di Lévy). *Se per ogni* $k \in \{1, \dots, n\}$ *si ha*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=k}^{n} X_j\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - S_{k-1}| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) \le \delta\,, \tag{4.4.4}$$

allora

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j\le n} |S_j| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\delta}{1-\delta}\,.$$

Dimostrazione. Si definiscano gli insiemi A_j come nella dimostrazione del Teorema 4.4.2. Se il punto ω appartiene a $A_j \cap \{|S_n| \le \varepsilon/2\}$ si ha

$$-\frac{\varepsilon}{2} \le S_n(\omega) = S_n(\omega) - S_j(\omega) + S_j(\omega) \le S_n(\omega) - S_j(\omega) - \varepsilon\,;$$

e, poiché si ha contemporaneamente $S_n \le \varepsilon/2$ e $S_j \ge \varepsilon$, anche

$$\frac{\varepsilon}{2} \ge S_n(\omega) - S_j(\omega) + \varepsilon\,,$$

sicché

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{j\le n} |S_j| \ge \varepsilon\right\} \bigcap \left\{|S_n| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j \cap \left\{|S_n| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&\le \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j \cap \left\{|S_n - S_j| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\, \mathbb{P}\left(|S_n - S_j| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\le \delta \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right) = \delta\, \mathbb{P}\left(\sup_{j\le n} |S_j| \ge \varepsilon\right)\,.
\end{aligned}$$

D'altro canto, è

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{j\le n} |S_j| \ge \varepsilon\right\} \bigcap \left\{|S_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \le \mathbb{P}\left(|S_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \le \delta\,.$$

Sommando le due ultime diseguaglianze, si ottiene

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j\le n} |S_j| \ge \varepsilon\right) \le \delta + \delta\, \mathbb{P}\left(\sup_{j\le n} |S_j| \ge \varepsilon\right)\,,$$

onde l'asserto. $\square$

Teorema 4.4.6. *Sia data una successione* (X_n) *di v.a. indipendenti definite nello spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Posto* $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ $(n \in \mathbb{N})$*, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(a) (S_n) *converge in legge;*

(b) (S_n) *converge in probabilità;*

(c) (S_n) *converge q.c..*

Dimostrazione. Basta, naturalmente, stabilire le implicazioni (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c).

(a) $\Longrightarrow$ (b) Sia φ_n la f.c. di X_n. Allora

$$\varphi(t) := \prod_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(t)$$

è un prodotto infinito convergente, vale a dire φ è una f.c.. Siccome φ è continua nell'origine, ove è $\varphi(0) = 1$, essa è diversa da zero in un intervallo $[-T, T]$. Perciò, per ogni $t \in [-T, T]$, si ha

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \prod_{j=m+1}^{n} \varphi_j(t) = 1 \,. \tag{4.4.5}$$

Infatti $Z_n(t) := \sum_{j=1}^n \operatorname{Log} \varphi_j(t)$ è una serie convergente, sicché soddisfà alla condizione di Cauchy; pertanto

$$\operatorname{Log} \varphi(t) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \sum_{j=m+1}^{n} \operatorname{Log} \varphi_j(t) = 0 \,.$$

Dall'esercizio 3.5 segue che la relazione (4.4.5) vale per ogni $t \in \mathbb{R}$; ciò implica che la successione

$$(S_n - S_m)_{m,n \in \mathbb{N}, m<n}$$

converge in legge alla v.a. 0. Pertanto vi converge anche in probabilità, sicché

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \mathbb{P}\left(|S_n - S_m| \geq \delta\right) = 0 \,,$$

ciò che assicura che (S_n) sia una successione di Cauchy in probabilità e che, dunque, converga in probabilità.

(b) $\Longrightarrow$ (c) è una conseguenza immediata della diseguaglianza di Lévy. $\square$

4.5 Un'applicazione della LGN

Diamo qui un'applicazione della LGN che riveste grande importanza per la Teoria dell'Informazione (in forme meno semplici di quella qui presentata).

Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si consideri una successione X_n di v.a. indipendenti e isonome, ognuna delle quali assume valori nell'insieme finito $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$. Si ponga $p_j := \mathbb{P}(X_n = s_j)$; poiché le v.a. hanno tutte la stessa legge, p_j non dipende da n. Si ponga inoltre

$$\Omega_n := S^n = \underbrace{S \times \cdots \times S}_{n \text{ volte}}$$

e sulla famiglia delle parti di Ω_n si consideri la probabilità definita sui punti

$$\omega_n = (s^{(1)}, \dots, s^{(n)}) \in \Omega_n ,$$

ove $s^{(j)} \in S$, mediante

$$\mathbb{P}_n(\{\omega_n\}) := \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(s^{(j)}) = \prod_{j=1}^{r} p_j^{N_j^{(n)}(\omega)} ,$$

ove $N_j^{(n)}$ è la v.a. che conta quante volte nelle prime n prove le v.a. della successione X_n abbiano assunto il valore s_j,

$$N_j^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k = s_j\}} .$$

Naturalmente, si può definire un'unica probabilità Q sul prodotto numerabile

$$\Omega_\infty = S^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} S ,$$

in modo che $\mathbb{P}_n$ sia la restrizione di Q a $\mathcal{P}(\Omega_n)$ (si ricordi il Teorema 1.15.5).

Si chiama *entropia della successione* (X_n), o, piú comunemente, *entropia di Shannon* della legge di probabilità $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ la quantità

$$H_r(p_1, \dots, p_r) := -\sum_{j=1}^{r} p_j \ln p_j . \tag{4.5.1}$$

In effetti, nella (4.5.1), si è soliti prendere i logaritmi in base 2 anziché in base e; la differenza è, rispetto alla (4.5.1), data da una costante moltiplicativa.

Si osservi che l'entropia H_r dipende dalle probabilità $p_1, \dots, p_r$ ma non dai valori assunti dalle v.a. della successione (X_n).

Non è difficile provare, e per questo si vedano gli esercizî, che il massimo di H al variare di $(p_1, \dots, p_r)$ tra le leggi di probabilità sull'insieme finito S, vale a dire quando $p_j \geq 0$ per ogni $j = 1, \dots, r$ e $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$, è dato da $\ln r$ e che il massimo è raggiunto dalla distribuzione uniforme su S,

$$H_r(p_1, \dots, p_r) \leq H_r\left(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}\right) = \ln r .$$

Con queste posizioni vale il seguente

Teorema 4.5.1. (MacMillan) *Per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $\beta > 0$, esiste un naturale $n_0 := n_0(\alpha, \beta)$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, si possa trovare un sottoinsieme C_n di Ω_n con le seguenti proprietà:*

(a) *$Q(C_n) \geq 1 - \alpha$;*

(b) *per ogni $\omega \in C_n$ è*

$$e^{-n(H_r+\beta)} \leq Q(\{\omega\}) = \mathbb{P}_n(\{\omega_n\}) \leq e^{-n(H_r-\beta)} ;$$

(c) $e^{n(H_r-\beta)} \le \mathrm{card}(C_n) \le e^{n(H_r+\beta)}$,

ove $H_r := H_r(p_1, \ldots, p_r)$.

Dimostrazione. (a) Si scelga $\delta = \delta(\beta) > 0$ in modo che sia

$$\delta \sum_{j=1}^{r} |\ln p_j| \le \frac{\beta}{2} ,$$

e si ponga

$$C_n := \bigcap_{j=1}^{r} \left\{ \left| \frac{N_j^{(n)}}{n} - p_j \right| \le \delta \right\} .$$

Segue dalla LGN debole (Teorema 4.3.3) che $Q(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, cioè $Q(C_n) \ge 1 - \alpha$ per n maggiore o eguale a un opportuno $n_1 = n_1(\alpha, \beta)$.

(b) Sia $\omega_n = (s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n)})$ un punto di C_n Allora

$$\begin{aligned}
Q(\{\omega_n\} \times S \times S \times \ldots) = \mathbb{P}_n(\{\omega_n\}) &= \prod_{j=1}^{r} p_j^{N_j^{(n)}(\omega_n)} \\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^{r} N_j^{(n)}(\omega_n) \ln p_j \right) = \exp\left\{ -n \left(-\sum_{j=1}^{r} \frac{N_j^{(n)}}{n} \ln p_j \right) \right\} \\
&= \exp\left\{ -n \left(-\sum_{j=1}^{r} p_j \ln p_j - \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{N_j^{(n)}}{n} - p_j \right) \ln p_j \right) \right\} \\
&= \exp\left\{ -n\, H_r + n \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{N_j^{(n)}}{n} - p_j \right) \ln p_j \right\} .
\end{aligned}$$

Poiché ω appartiene a C_n segue che

$$\left| \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{N_j^{(n)}}{n} - p_j \right) \ln p_j \right| \le \delta \sum_{j=1}^{r} |\ln p_j| \le \frac{\beta}{2} ,$$

sicché

$$\begin{aligned}
e^{-n(H_r+\beta)} \le \exp\left\{ -n \left(H_r + \frac{\beta}{2} \right) \right\} &\le Q(\{\omega\} \times S \times S \times \ldots) \\
&= \mathbb{P}_n(\{\omega_n\}) \le \exp\left\{ -n \left(H_r - \frac{\beta}{2} \right) \right\} \le e^{-n(H_r-\beta)} .
\end{aligned}$$

(c) Scende da (b) che

$$\begin{aligned}
\exp\left\{ -n \left(H_r + \frac{\beta}{2} \right) \right\} \mathrm{card}(C_n) \le Q(C_n) &= \sum_{\omega \in C_n} Q(\{\omega\} \times S \times S \times \ldots) \\
&\le \exp\left\{ -n \left(H_r - \frac{\beta}{2} \right) \right\} \mathrm{card}(C_n) ;
\end{aligned}$$

e poiché

$$1-\alpha \leq Q(C_n) = \sum_{\omega\in C_n} Q(\{\omega\}\times S\times S\times\dots) \leq 1\,,$$

si ha, per n abbastanza grande, diciamo per $n \geq n_2 = n_2(\alpha,\beta)$,

$$\begin{aligned} e^{n(H_r-\beta)} &\leq (1-\alpha)\, e^{n(H_r-\beta/2)} \leq Q(C_n)\, e^{n(H_r-\beta/2)} \\ &\leq \operatorname{card}(C_n) \leq Q(C_n)\, e^{n(H_r+\beta/2)} \leq e^{n(H_r+\beta)}\,, \end{aligned}$$

onde l'asserto ponendo $n_0 := n_1 \vee n_2$. □

4.6 Note al Capitolo 4

Sezione 4.1 Il nome "Teorema del limite centrale" fu introdotto da Pólya nel 1920. Come già detto, il primo caso di tale teorema fu dimostrato per l'approssimazione della legge binomiale per $p = 1/2$ da de Moivre nel 1733. La prima dimostrazione completa in un caso generale fu data da Lyapunov (1901). Il teorema che diamo nelle lezioni è dovuto al finlandese Lindeberg (1922). Il libro di Adams (2009) dà la storia dello sviluppo del TLC. Molto interessante anche l'articolo (Le Cam, 1986). Infine una notazione di linguaggio; in italiano, e in tutte le lingue neolatine, si oscilla tra le dizioni "Teorema del limite centrale" (qui adottata) e "Teorema centrale del limite". Nella prima dizione si pone l'accento sul fatto che si considerano v.a. centrate, mentre nella seconda si sottolinea l'importanza del teorema in Probabilità.

Per il TLC il riferimento classico è (Gnedenko & Kolmogorov, 1954). Per una trattazione piú recente con un ampliamento dedicato alle v.a. con valori in uno spazio di Banach, si veda (Araujo & Giné, 1980).

Buona parte dei libri dedicati alla probabilità sorvola senza la dovuta attenzione sulla definizione del ramo principale del logaritmo. La questione è trattata in maniera rigorosa da Chung; si veda il Teorema 7.6.1 in (Chung, 1974), qui riprodotto.

Teorema 4.6.1. *Sia data la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e si supponga che sia $f(0) = 1$, che esista $T > 0$ tale che f sia continua nell'intervallo $[-T, T]$ e che f non si annulli in tale intervallo. Esiste allora un'unica funzione* $\mathrm{Log} : [-T, T] \to \mathbb{C}$ *tale che*

(a) $\mathrm{Log}(0) = 0$;

(b) *per ogni* $t \in [-T, T]$ *risulti* $f(t) = \exp(\mathrm{Log}(t))$.

Il risultato continua a valere se $[-T, T]$ è sostituito da $\mathbb{R}$.

Sezione 4.2 Le condizioni necessarie perché valga il TLC comparvero in due articoli di Feller (1935, 1937) scritti nel periodo che egli trascorse a Stoccolma dopo che fu obbligato a lasciare il suo posto all'Università di Kiel in seguito all'avvento del Nazismo e prima di stabilirsi definitivamente negli Stati Uniti.

Sezione 4.4 Sulle leggi dei grandi numeri si possono leggere il recente articolo di Seneta (2013) e i due articoli di Regazzini (2005, 2006), utilissimi per la storia dei teoremi che sono noti sotto questo nome e per il legame con la nozione stessa di probabilità.

Rajchman è uno dei matematici polacchi vittime del nazismo nella Polonia occupata durante la Seconda Guerra Mondiale. Si veda il primo numero della rivista *Fundamenta Mathematicae* pubblicato dopo la sospensione causata dalla guerra, *Fund. Math.* **33** (1945).

La diseguaglianza (**??**) fu introdotta da Kolmogorov (1928); essa è utilissima in tutte le questioni riguardanti somme di v.a. indipendenti. Nello stesso articolo Kolmogorov dà nel Teorema 11 una condizione necessaria e sufficiente perché valga la LGN debole; la dimostrazione dipende però dalla diseguaglianza di Kolmogorov. La condizione necessaria e sufficiente è costituita dai tre limiti

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(|X_j| > n) = 0 \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_j \, \mathbf{1}_{\{|X_j|\le n\}}\right) = 0 \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_j^2 \, \mathbf{1}_{\{|X_j|\le n\}}\right) = 0 \,. \end{aligned}$$

Si osservi che le *Osservazioni* all'articolo contengono la correzione di un errore. Anche i sommi talvolta sbagliano!

Per il Teorema 4.4.5 si veda (Etemadi, 1981). Il Teorema 4.4.4 è di solito dimostrato direttamente e non come corollario del Teorema 4.4.5 di Etemadi. Per la dimostrazione usuale si veda, per esempio, (Rao, 1984); una dimostrazione ancora differente si trova in (Grimmett & Stirzaker, 2001).

Sezione 4.5 Questa sezione è ricalcata sulla trattazione di Sinai (1992). Per un'introduzione alla Teoria dell'Informazione si possono consultare (Ash, 1965), (Kullback, 1968), (Csiszár & Körner, 1986).

4.7 Esercizî sul Capitolo 4

4.1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è derivabile n volte e le sue derivate sono continue nell'intervallo $I = [-a, a]$, allora si ha

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)t^j}{j!} + t^n \int_0^1 \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(st) \, \mathrm{d}s \,.$$

Se $|f^{(n)}(t)| \le k$ per ogni $t \in I$, allora

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)t^j}{j!} + \frac{\theta(t)|t|^n}{n!} \quad \text{con } |\theta| \le k \,.$$

4.2. Si mostri la validità delle (4.1.3) e delle (4.1.4).

4.3. Si mostri la validità della (4.1.5).

4.4. Si studii la convergenza della successione di v.a.

$$Z_n := \frac{\sqrt{n} X_0}{\sqrt{\sum_{j=1}^n X_j^2}},$$

ove le v.a. della successione $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ sono indipendenti e tutte di legge $N(0,1)$. Si tenga presente l'esercizio (4.78) e si paragonino i risultati con quelli dell'esercizio (5.35).

4.5. (Un inverso della LGN di Khinchin) Sia (X_n) una successione di v.a indipendenti ed isonome. Se

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$$

converge q.c. ad un limite finito, allora X_1 è in L^1 (e, quindi, lo sono tutte le v.a della successione) ed il limite è eguale a $\mathbb{E}(X_1)$.

4.6. Sia (X_n) una successione di v.a. incorrelate e centrate di L^2 con $V(X_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, se $\alpha > 1$, riesce

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{q.c.}\,.$$

4.7. Sia (X_n) una successione di v.a. incorrelate e centrate di L^2 con le varianze uniformemente limitate, tali cioè che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V(X_n) < +\infty\,.$$

Se $\alpha > 1/2$, allora

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{in probabilità.}$$

4.8. Se la successione di v.a. (X_n) di L^2 obbedisce al TLC e se è verificata la condizione

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{j\le n} \frac{\sigma_j^2}{c_n^2} = 0\,, \tag{a}$$

allora la condizione di Lindeberg è verificata.

La condizione (a) equivale alle altre due, considerate congiuntamente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n^2}{c_n^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^2 = +\infty\,. \tag{b}$$

4.9. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, tutte di legge esponenziale di parametro 1, $X_n \sim \Gamma(1,1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(a) Si introducano le v.a. $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ e se ne scriva la legge;

(b) dopo aver scritto la f.c. della v.a. ridotta

$$Z_n := \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)} ,$$

si mostri direttamente che (X_n) obbedisce al TLC;

(c) sfruttando (b) e il teorema d'inversione per le f.c. integrabili si ottenga la formula di Stirling nella versione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-n}\, \sqrt{2\,\pi}}{\Gamma(n)} = 1 .$$

4.10. Sia (X_n) una successione di v.a. di L^2 che soddisfà alla condizione di Lindeberg. Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\leq n} \frac{V(X_n)}{V(S_n)} = 0 ,$$

ove, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$.

4.11. Sia (X_n) un processo di Bernoulli con

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} .$$

Posto, al solito, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, la LGN di Bernoulli assicura che, per ogni $\varepsilon > 0$, valga

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0 .$$

Mostriamo che la convergenza a zero avviene esponenzialmente. Si definiscano due funzioni $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{I}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 , \\ x \ln x, & x \in \,]0,1] , \end{cases}$$

e

$$\mathcal{I}_2(x) := \begin{cases} \varphi(x) + \varphi(1-x) + \ln 2, & x \in [0,1] , \\ +\infty, & x \notin [0,1] . \end{cases}$$

Allora, se $A := \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right\}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = -\min_{x\in A} \mathcal{I}_2(x) .$$

Per questo risultato, che è il primo teorema sulle grandi deviazioni, si veda (Cramér, 1938). Per un'introduzione all'argomento delle grandi deviazioni si può consultare (Dembo & Zeituni, 1998).

4.12. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, tutte di legge $N(0,1)$ e tutte definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e si consideri la successione (S_n) con $S_n := \sum_{j=1}^n X_j^2$. Si studii la convergenza in legge della successione

$$\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{2\,n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

4.13. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate, tutte definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; se (X_n) obbedisce alla LGN forte, allora, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq n\,\varepsilon) < +\infty\,.$$

4.14. Sia data una successione (X_n) di v.a. indipendenti ed isonome sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si consideri, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $\overline{F}_n : \mathbb{R} \times \Omega \to [0,1]$ definita da

$$\overline{F}_n(x,\omega) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}}(\omega)\,.$$

(a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \overline{F}_n(x,\omega)$ è una v.a.;

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un insieme $N_n \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(N_n) = 0$, tale che, per ogni $\omega \in N_n^c$, la funzione $x \mapsto \overline{F}_n(x,\omega)$ sia una f.r.; di piú, tranne che per i punti di un insieme di probabilità nulla, $\left\{\overline{F}_n(\cdot,\omega) : n \in \mathbb{N}\right\}$ è una successione di f.r.;

(c) $\overline{F}_n(x,\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$ q.c., ove F è la f.r. comune delle v.a. X_n;

(d) $\sqrt{n}\,\left\{\overline{F}_n(x,\omega) - F(x)\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} N\left(0, F(x)\,\{1-F(x)\}\right)$ in legge.

La funzione $\overline{F}_n$ è detta, nella Statistica Matematica, *funzione di ripartizione empirica*.

4.15. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate di L^2 che soddisfà alla condizione di Lindeberg (4.1.1). Se $V(X_n) = \sigma_n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e se Y è una v.a. di L^2 con $\mathbb{E}(Y) = 0$ e $V(Y) = 1$, la successione (Y_n) ove $Y_n := \sigma_n\,Y$ soddisfà alla condizione di Lindeberg.

4.16. Come preliminare alla dimostrazione di Trotter del TLC, dimostrazione che non fa ricorso alle f.r., si consideri la seguente situazione.

Sia X una v.a. sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $U_b = U_b(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitate e uniformemente continue, munito della norma $\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Si definisca in U_b l'operatore lineare T_X mediante

$$(T_X\,f)\,(t) := \mathbb{E}\left[f \circ (X+t)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\;\mathrm{d}F_X(x) \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Si mostri che

(a) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\|(T_X\,f)\,(t)\| \leq \|f\|$, sicché T_X è una contrazione;

(b) per ogni coppia t_1, t_2 di numeri reali, è

$$|(T_X\,f)\,(t_1) - (T_X\,f)\,(t_2)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y+t_1) - f(y+t_2)|\,,$$

sicché $T_X\,f \in U_b$ e $T_X : U - b \to U_b$;

(c) se X_1 e X_2 sono indipendenti, $T_{X_1+X_2} = T_{X_1}\,T_{X_2} = T_{X_2}\,T_{X_1}$;

(d) se U_b^2 è il sottoinsieme di U_b formato dalle funzioni che sono derivabili due volte e tali che entrambe le derivate appartengano ancora a U_b, la condizione

$$\forall f \in U_b^2 \qquad \lim_{n\to+\infty} \|T_{X_n} f - T_X f\| = 0$$

assicura che (X_n) converga in legge a X;

(e) se X e Y sono indipendenti, allora

$$\forall f \in U_b \qquad \|T_X^n f - T_Y^n f\| \le n \, \|T_X f - T_Y f\| ;$$

(f) se $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sono indipendenti, allora, per ogni $f \in U_b$, si ha

$$\|T_{X_1} T_{X_2} \dots T_{X_n} f - T_{Y_1} T_{Y_2} \dots T_{Y_n} f\| \le \sum_{j=1}^{n} \|T_{X_j} f - T_{Y_j} f\| .$$

Si veda (Trotter, 1959).

4.17. Ricorrendo ai risultati dell'esercizio precedente si dimostri il teorema di Lindeberg, prima nel caso di v.a. isonome e poi nel caso generale.

4.18. Sia U una v.a. con legge uniforme su $(0, 2\pi)$ e si definisca $X_n := \sin nU$ ($n \in \mathbb{N}$). Allora la successione (X_n) tende a zero q.c. nel senso di Cesàro.

4.19. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome di L^2. Si mostri per $\{X_n\}$ la LGN debole è conseguenza del TLC.

4.20. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si consideri il quadro

$$\begin{array}{cccc} X_{11}, & X_{12}, & \dots, & X_{1\,k_1} \\ X_{21}, & X_{22}, & \dots, & X_{2\,k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1}, & X_{n2}, & \dots, & X_{n\,k_n} \end{array}$$

formato da v.a. ($\{X_{nj}\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, k_n$, ove $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$. Per $\varepsilon > 0$ si considerino le condizioni

$$\forall j \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0 ; \tag{a}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{j=1,2,\dots,k_n} \mathbb{P}(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0 ; \tag{b}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\max_{j=1,2,\dots,k_n} |X_{nj}| > \varepsilon \right) = 0 ; \tag{c}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{P}(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0 . \tag{d}$$

Si mostri che

- (d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a);
- se le v.a. $\{X_{nj} : j = 1, 2, \dots, k_n\}$ di ogni riga sono indipendenti, allora le condizioni (c) e (d) si equivalgono;

– le implicazioni (d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (b) sono strette.

4.21. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la v.a. X_n abbia legge uniforme su $(-n, n)$. Si mostri che la successione (X_n) verifica la condizione di Lindeberg.

4.22. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si considerino le v.a. a due a due incorrelate, definite, per $n \in \mathbb{N}$ e per $\alpha > 1$, da

$$\mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = \mathbb{P}(X_n = -n^\alpha) = \frac{1}{6\, n^{2\,(\alpha-1)}}\,,$$
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{3\, n^{2\,(\alpha-1)}}\,.$$

Si mostri che la successione (X_n) verifica la condizione di Lindeberg se, e solo se, $\alpha < 3/2$.

4.23. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia data la successione di v.a. (X_n); per ogni $j \geq 2$, la v.a. X_j dipende solo dalle v.a. X_{j-1} e X_{j+1}, mentre è indipendente dalle rimanenti. Se le varianze sono uniformemente limitate,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad V(X_n) \leq H\,,$$

allora vale la LGN debole.

4.24. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia data la successione di v.a. (X_n) tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$V(X_n) \leq H \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Cov}(X_j, X_k) < 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n; j \neq k)\,.$$

Allora (X_N) obbedisce alla LGN debole.

4.25. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia data la successione di v.a. (X_n). Se le varianze delle v.a. della successione sono uniformemente limitate, $V(X_n) \leq H$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e se

$$\lim_{|j-k| \to +\infty} \operatorname{Cov}(X_j, X_k) = 0\,,$$

allora (X_n) obbedisce alla LGN debole.

4.26. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di v.a. incorrelate, isonome e centrate di L^2. Si adatti la dimostrazione del Teorema di Rajchman e si mostri dapprima che

$$\text{se} \quad \alpha > \frac{3}{4}, \ \text{allora} \quad \frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \text{q.c.} \tag{a}$$

e, quindi, adattando ancora quest'ultima dimostrazione, si mostri che

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \text{q.c.} \quad \text{per ogni } \alpha > \frac{1}{2}\,.$$

4.27. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, isonome e centrate di L^2. Si dimostri che la successione (Z_n), ove

$$Z_n := \frac{(S_n)^2}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2$$

converge in legge e se ne trovi il limite.

4.28. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome a valori in $[1, +\infty[$.

(a) A quali condizioni deve soddisfare il parametro reale λ affinché, per $t \geq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia possibile l'eguaglianza

$$\mathbb{P}\left(X_n \geq t\right) = t^{-\lambda}\,?$$

(b) Si calcolino la media e la varianza di X_n per quei valori di λ per i quali queste esistono.

(c) Si mostri che converge q.c. la successione

$$\left\{\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right)^{1/n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

e se ne determini il limite.

4.29. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di vettori aleatorî a valori in $\mathbb{R}^k$ indipendenti ed isonomi con vettore delle medie eguale a $\mathbf{m}$ e matrice di varianza–covarianza Γ. Vale, allora, la seguente versione vettoriale del TLC:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j - n\,\mathbf{m}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} N_k(\mathbf{0}, \Gamma)\,,$$

ove $\mathbf{0}$ è il vettore nullo in $\mathbb{R}^k$.

4.30. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la successione (X_n) di v.a. indipendenti è tale che

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{2^n}\,.$$

Allora (X_n) obbedisce al TLC.

4.31. Si mostri come far discendere il TLC nel caso di una successione (X_n) di v.a. indipendenti ed isonome, vale a dire il Corollario 4.1.2, dal Teorema 4.1.2.

4.32. Siano $z_1, z_2, \dots, z_n$ e $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ numeri complessi tali che, per ogni $j = 1, 2, \dots, n$, risulti $|z_j| \leq 1$ e $|z'_j| \leq 1$; allora,

$$\left|\prod_{j=1}^{n} z_j - \prod_{j=1}^{n} z'_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|z_j - z'_j\right|\,.$$

4.33. (Convergenza alla legge di Poisson) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano X_{n1}, X_{n2},..., X_{nn} v.a. bernoulliane indipendenti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con

$$\mathbb{P}(X_{nj} = 1) = p_{nj} \qquad\qquad \mathbb{P}(X_{nj} = 0) = q_{nj}$$

e si supponga che sia

$$\sum_{j=1}^{n} p_{nj} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \max_{j\le n} p_{nj} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Allora, posto $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_{nj}$, la successione (S_n) converge in legge alla distribuzione di Poisson di parametro λ, $\mathcal{P}(\lambda)$.

4.34. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di v.a. tali che

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2\,n^2}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} .$$

Obbedisce al TLC questa successione?

4.35. Sia (X_n) una successione di v.a. definite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$, la successione (X_n) obbedisce alla LGN debole, se, e solo se, vale la condizione

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_n^2}{n^2 + S_n^2} \right) = 0 .$$

4.36. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, isonome, tutte di legge di Cauchy di parametri 0 e 1, $X_n \sim C(0,1)$ $(n \in \mathbb{N})$. Se $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$, si mostri che *non* vale

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0 ;$$

pertanto, la successione (X_n) non obbedisce alla LGN debole.

4.37. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ due successioni indipendenti, ciascuna formata da v.a. indipendenti di leggi $X_n \sim \mathcal{P}(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ e $Y_m \sim \mathcal{P}(m)$ $(m \in \mathbb{N})$. Si mostri che la v.a.

$$Z_{n,m} := \frac{(X_n - n) - (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}}$$

è asintoticamente ben definita e che, per $n, m \to +\infty$, tende in legge alla distribuzione $N(0,1)$.

4.38. Certi eventi accadono ai tempi $T_1, T_2, \ldots$, ove, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n := \sum_{j=1}^{n} X_j ;$$

Le v.a. X_n sono indipendenti, isonome, positive e in L^1 (hanno, cioè, speranza finita m). Per $t > 0$, sia $N(t) := \max\{n : T_n \le t\}$ il numero di eventi realizzatisi entro il tempo t. Si mostri che valgono le affermazioni

$$N(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \qquad \text{q.c.}\,, \tag{a}$$

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{m} \qquad \text{q.c.}\,. \tag{b}$$

4.39. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ogni successione (X_n) di v.a. indipendenti, isonome di L^2 obbedisce alla LGN debole.

4.40. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti di legge

$$\mathbb{P}\left(X_n = n^\lambda\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -n^\lambda\right) = \frac{1}{2},$$

ove $\lambda > 0$. Allora (X_n) obbedisce al TLC per ogni $\lambda > 0$, ma non obbedisce alla LGN debole se $\lambda \geq \frac{1}{2}$.

4.41. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. limitata in L^2, $\mathbb{E}(X_n^2) \leq c < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e tale che $\mathbb{E}(X_j\, X_k) = 0$ se $j \neq k$. Se, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, allora

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \text{in } L^2 \text{ e in probabilità.}$$

4.42. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome di L^1. Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Y_n := e^{X_n}$, si mostri che la successione

$$\left(\left(\prod_{j=1}^n Y_n\right)^{1/n}\right)$$

converge q.c. ad una costante.

4.43. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, siano (X_n) e (Y_n) due successioni, ciascuna delle quali è formata da v.a. indipendenti ed isonome di L^1; si supponga, inoltre, che sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = \alpha$ e $\mathbb{E}(Y_n) = \beta$. Si mostri che

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n Y_j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{q.c..}$$

4.44. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome di L^p; allora

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}\left(X_1^p\right) \quad \text{q.c..}$$

4.45. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome, tutte di legge $N(1, \sigma^2)$; allora

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sigma^2 + 1} \quad \text{q.c..}$$

4.46. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, tutte di legge $C(0, 1)$. Si mostri che non esiste alcuna costante $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \quad \text{in probabilità o q.c.;}$$

qui, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$. Si mostri, invece che S_n/n converge in legge e se ne trovi il limite.

4.47. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome di L^1 a valori interi, $X : \Omega \to \mathbb{Z}$, con $\mathbb{E}(X_1) > 0$. Posto $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, si mostri che

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{q.c.}.$$

4.48. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) di v.a. indipendenti ed isonome tali che $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2$. Se $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ si ponga $G_n := 2\, S_n - n$ (si tratta della v.a. che dà la posizione in una passeggiata aleatoria simmetrica); allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{G_n}{n} < x\right) = \varphi(x)\,,$$

ove φ è la f.r. della legge $N(0,1)$.

4.49. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti tutte di legge di Laplace, con densità

$$f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}\,.$$

Si mostri che

$$\sqrt{n}\,\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2}\right)$$

converge in legge a $N(0, 1/2)$.

4.50. Nello spazio di probabilità $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, λ è la (restrizione della) misura di Lebesgue, si consideri la successione (X_n), ove, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n := n\, \mathbf{1}_{[0,1/n]} + \mathbf{1}_{]1/n,1]}\,,$$

e sia Y una v.a. di legge $N(0,1)$. Per $n \in \mathbb{N}$ si ponga $Z_n := X_n\, Y$. Si mostri, senza ricorrere al teorema di Lindeberg, che

(a) $\mathbb{E}(X_n^2) \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$;

(b) $\mathbb{E}(Z_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$;

(c) $\lim_{n\to+\infty} V(Z_n) = +\infty$;

(d) $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} N(0,1)$.

4.51. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome di L^2 con $\mathbb{E}(X_1) = 1$ e $V(X_1) = \sigma^2$. Si mostri che, se $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, allora

$$\frac{2}{\sigma}\,\left(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} N(0,1) \qquad \text{in legge.}$$

4.52. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome, tutte di legge uniforme in $(-1,1)$, $X_n \sim U(-1,1)$. Introdotte, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la v.a.

$$Y_n := \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2 + \sum_{j=1}^n X_j^3}\,,$$

si mostri che la successione $(\sqrt{n}\, Y_n)$ converge in legge.

4.53. (a) Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate di L^p con $p \in [1,2]$. Se converge la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right)}{n^p}\,,$$

allora converge q.c. la serie aleatoria

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X_n}{n}\,.$$

(b) Viceversa, se è divergente la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\beta_n^{(p)}}{n^p}, \qquad p \in [1,2]$$

allora si possono trovare uno spazio di probabilità e, su questo, una successione (X_n) di v.a. indipendenti e centrate di L^1, tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si abbia

$$\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) = \beta_n^{(p)}\,,$$

e che la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X_n}{n}$$

non converga q.c..

(Si veda (Marcinkiewicz & Zygmund, 1937)).